Nombres réels, suites

29 août 2018

1 Nombres réels

1.1

Déterminer toutes les isométries de $\mathbf{R}$ muni de sa distance usuelle.

1.2

Dans tout ce qui suit, $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbf{R}$, d'intérieur non vide, et f une fonction continue de I vers $\mathbf{R}$.
a) Montrer que f est bornée sur I. On pourra introduire $c = \sup\{y \in I \mid f \text{ est bornée sur } [a, y]\}$.
Prouver ensuite que f atteint sa borne supérieure sur I.
b) On suppose que $f(a)f(b) < 0$. Montrer que f s'annule sur I.
En déduire que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Que dire si f ne s'annule pas ?

1.3

On conserve les notations ci-dessus : I, f. Soit J_λ, $\lambda \in \Lambda$, une famille d'intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ recouvrant I (*i.e.* dont la réunion contient I). Montrer que l'on peut en extraire une sous-famille finie qui recouvre I.

1.4

Soit $(I_n) = (]a_n, b_n[)$ une suite décroissante d'intervalles ouverts bornés non vides de $\mathbf{R}$. Montrer que l'intersection des I_n est non vide dès qu'aucune des suites $(a_n), (b_n)$ n'est stationnaire.

1.5

Etudier la densité de l'ensemble des nombres de la forme $\sqrt{m} - \sqrt{n}$, $(m, n) \in \mathbf{N}^2$.

1.6

(u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que (i) $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$; (ii) $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$. Montrer que $\{u_n - v_m \mid m, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
En déduire que $\{\sin(\log(n)) | n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

2.5 Mq $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e < 1 + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n\, n!}$

2 Suites réelles : généralités

2.1

Soit (u_n) une suite bornée de réels strictement positifs tels que $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

2.2.

Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels telle que $\forall n, \quad 2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$. Montrer que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et que la suite (x_n) converge.

2.3

Soit $u_n = \cos(n!\pi x)$. Montrer que la suite converge pour $x \in \mathbf{Q}$ mais aussi pour $x = 2e$.

$e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$; $0 < \alpha_n < \frac{1}{n\, n!}$

$n!\, 2e = 2N \frac{n!}{n!} + 2\alpha_n$

2.4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes. Montrer que la suite $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ converge.

Suites presque monotones. a) Soit (u_n) une suite de nombres complexes, et σ un permutation de $\mathbf{N}$. Montrer que (u_n) converge ssi $u_{\sigma(n)}$ converge.
b) Quelles sont les suites réelles (u_n) telles qu'il existe une permutation σ de $\mathbf{N}$ telle que la suite $u_{\sigma(n)}$ soit monotone à partir d'un certain rang ?

3 Exp et Log

3.1

Soit u_n une suite réelle. On suppose qu'il existe un nombre réel a tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$. Etudier la suite u_n^n.

Application : Etudier la suite $u_n = \left((\sin(\frac{n\pi}{6n+1}) + \cos(\frac{n\pi}{3n+2})\right)^n$.

3.2

Soit $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \sqrt{\frac{k}{n^3}})$. Etudier le comportement de la suite u_n.

3.3

a) Soit x un réel irrationnel et $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers p et q tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qN}$ et $1 \leq q \leq N$.
b) Etudier la suite $u_n = \cos^n(n)$.

$f(x_k)-x_k \to 0$

$x_{n+1}-x_n = a_n(f(x_n)-x_n) \leq a_n$

$x_n - x_0 \leq \sum a_k$

$\frac{1}{4}\left|-\frac{1}{x_n^2}\sin(\frac{1}{x})\right| \leq \frac{4}{3}$

$\leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1$

3.4 Cercle de valeurs d'adhérence

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{i}{k})$.

4 Suites récurrentes

4.1

Etudier les suites définies par récurrence par

— $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1/u_n)$
— $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{u_n})$
— $u_{n+1} = \sin 2u_n$.
— $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$
— $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^3 \sin(1/u_n)$

4.2

Soit (a_n) une suite de réels de $[0,1]$ tendant vers 0, x_0 dans $[0,1]$ et f continue de $[0,1]$ dans lui-même. On définit :

$$x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n f(x_n).$$

a) Montrer que si la série de terme général a_n converge, la suite (x_n) converge.
b) On suppose que la suite (x_n) converge vers l non point fixe de f. Montrer que la série de terme général a_n converge.
c) On suppose f de classe C^1, avec un unique point fixe l, et que la série de terme général a_n diverge. Montrer que la suite (x_n) converge vers l.
d) Montrer que la suite x_n est toujours convergente.

4.3

Soient $a \in [0,1[$ et u_n la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n^2 E(1/u_n).$$

Montrer que u_n est stationnaire, ou converge vers 0.

4.4

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de $0 < u_0 < v_0$ et récurrence $u_{n+1} = (u_n v_{n+1})^{1/2}$ et $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2$.

4.5

On se donne a_0 et a_1 strictement positifs. Nature de la suite définie par récurrence par $a_{n+2} = \log(1+a_{n+1}) + \log(1+a_n)$. On pourra introduire les suite récurrentes attachées à $f(x) = 2\log(1+x)$.

4.6

Soit u_n une suite réelle telle que $u_{n+1} - \sin u_n$ tende vers 0. Montrer que u_n tend vers 0. *Méthode suggérée.* Montrer que u_n est bornée, introduire l'ensemble A des valeurs d'adhérence de (u_n) et prouver que $\sin(A) = A$.

4.7

Soit u_n la suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$u_0 > \alpha \Longrightarrow (u_n) \mapsto +\infty \quad ; \quad u_0 < \alpha \Longrightarrow (u_n) \mapsto 0$$

Etudier le cas restant où $u_0 = \alpha$.

$f(x_n) - x_n \longrightarrow 0$

$A_\varepsilon = \{k, |f(x_k) - x_k| < \varepsilon\}$

$f(x_k) - x_k$ CV

$\Rightarrow x_n - x_0 = \sum_{k \in A} a_k (f(x_k) - x_k) + \sum_{k \notin A} a_k (f(x_k) - x_k) \geq \varepsilon \sum_{k \in A} a_k$

donc $f(x_n) - x_n \longrightarrow 0$

$\exists \varphi : f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \to 0$ $\quad f(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)} \to 0$

$\underbrace{x_n - x_0}_{CV} = \underbrace{\sum_{k \in \varphi(N)}}_{DV} + \sum_{k \notin \varphi(N)} f(x_n) - x_n$